5.15 Aplicación del concepto de límite en la continuidad de funciones y el modelado de situaciones reales

El concepto de límite permite definir la continuidad de una función y modelar cambios y comportamientos límite en situaciones del mundo real. Una función es continua en un punto si no hay saltos, rupturas, ni agujeros en ese punto. Esto significa que puedes dibujar el gráfico de la función en ese punto sin levantar el lápiz del papel. Esta idea se extiende a todo un intervalo: una función es continua en un intervalo si es continua en cada punto del intervalo.

La definición formal de continuidad en un punto se basa en tres condiciones que deben cumplirse para un valor específico x=a:

1. La función debe estar definida en a: *f(a)* debe existir.
2. El límite de la función cuando x se acerca a a debe existir: $\lim_{x\to a} f(x)$debe existir. Para ello deben existir los dos límites laterales y valer lo mismo.
3. El valor de la función en a debe ser igual al límite de la función cuando x se acerca a: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Las funciones continuas son muy frecuentes en las modelizaciones de situaciones de la vida cotidiana y en diversas aplicaciones prácticas. La razón de esto se debe a varias características útiles de las funciones continuas:

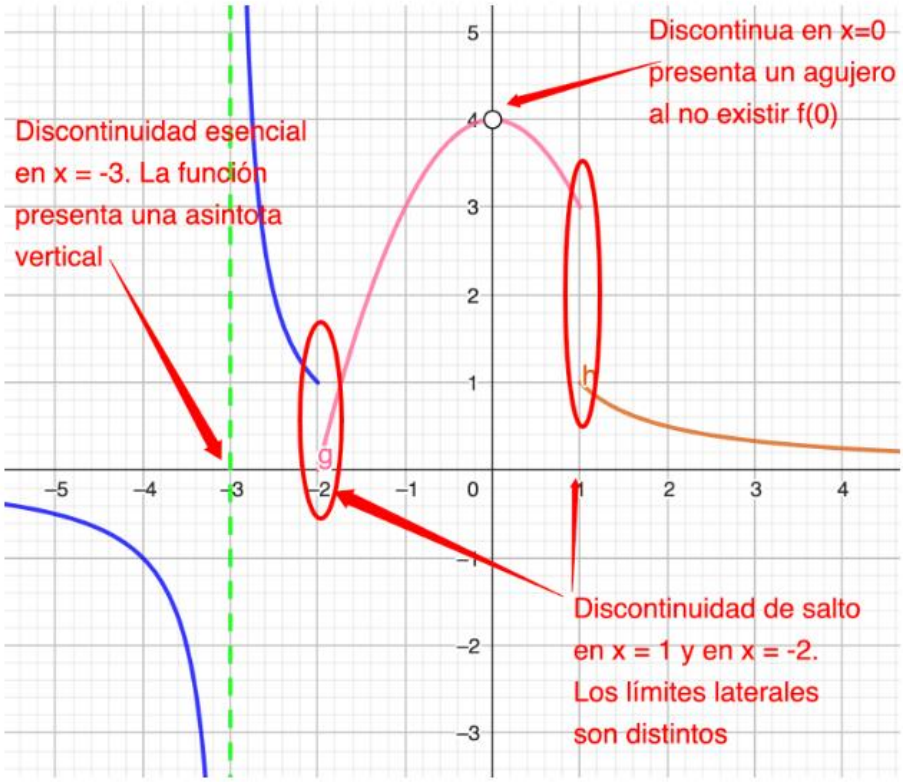
- Muchos fenómenos naturales y procesos en la vida cotidiana cambian de manera suave y gradual. Las funciones continuas son ideales para modelar tales situaciones, ya que no presentan saltos abruptos o discontinuidades.
- Las funciones continuas son más fáciles de analizar y manipular en cálculo.
- En física, muchas leyes y principios se expresan mediante funciones continuas, como las leyes del movimiento, termodinámica, electromagnetismo, etc. En ingeniería, se usan para modelar comportamientos de materiales, sistemas electrónicos, dinámica de fluidos, y más.
- En economía, las funciones continuas se utilizan para modelar comportamientos de mercados, teorías de consumo y producción, elasticidades, entre otros. En finanzas, son útiles para modelar flujos de efectivo, valoraciones de inversiones, etc.
- Se emplean para modelar fenómenos en psicología, sociología (como distribuciones de poblaciones), y en biología (crecimiento de poblaciones, difusión de sustancias, etc.).

Si una función no es continua en un punto, se dice que es **discontinua**. Hay varios tipos de discontinuidad, como:

- Discontinuidad evitable: existe un "agujero" en el gráfico de la función, pero podría "rellenarse" para hacer la función continua.
- Discontinuidad de salto: hay un salto abrupto en el gráfico de la función.
- Discontinuidad esencial: el comportamiento de la función cerca del punto es caótico o indefinido, como una asíntota vertical.

  La función cuya gráfica se muestra a abajo presenta los 3 tipos de discontinuidad: En x=0 es discontinua evitable, en x=1 y x=−2 es discontinua de salto y en x=−3 presenta una discontinuidad esencial. Al estudiarlo con los límites laterales se puede ver más claro:

- En el caso de la evitable (x=0), los dos límites laterales coinciden, pero la función no existe, por izquierda y derecha la función llega al mismo valor (4).
- En el caso de la de salto, en algunos libros las llaman de salto finito, (x=1), los límites laterales existen y toman valores finitos, pero diferentes entre si, por la izquierda se aproxima a 3 y por la derecha a 1.
- En el caso de la esencial, en algunos libros las llaman de salto infinito, (x=−3), alguno de los límites laterales se va a +∞ o −∞.



Recurso:https://es.slideshare.net/slideshow/aplicaciones-de-limitescontinuidad/65556418