5.3 Arquímedes y la aproximación al área

La mayor parte de los trabajos de Arquímedes se refieren a la determinación de áreas de superficies curvas y volúmenes de sólidos, que se obtienen a través de la comparación con áreas y volúmenes de triángulos, rectángulos y cubos. Su técnica demostrativa más poderosa es la combinación de un procedimiento de demostración por reducción al absurdo con el llamado método de exhaución.

Arquímedes aplicaba el método de exhaución de tres formas distintas:

- Por «aproximación», en la que una sucesión de polígonos regulares se inscribe en la figura curva en cuestión y se establece que la diferencia de áreas entre la figura curva y los polígonos es menor que una cantidad dada para un número suficientemente grande de lados del polígono regular. Normalmente cada polígono se obtiene del anterior doblando el número de sus lados.
- Por «compresión-diferencia», en la que se encierra la figura curvilínea mediante sucesiones de polígonos regulares inscritos y circunscritos, tales que la diferencia entre ellos (el circunscrito menos el inscrito) puede hacerse menor que cualquier cantidad dada por pequeña que esta sea. De ese modo, la diferencia entre la curva dada y los términos de ambas secuencias, con mayor razón, será menor que la cantidad dada.
- Por «compresión-división», procedimiento semejante el anterior, salvo en que la razón (división) de las áreas de los polígonos se acerca a la unidad más que cualquier razón preasignada.

1. Cálculo del Octágono Inscrito (A_i)

En el octágono inscrito, los vértices tocan el círculo. Esto significa que los dos lados iguales de cada triángulo interno son exactamente el radio del círculo ($r = 1$).

Para hallar el área de uno de estos 8 triángulos, usamos la fórmula trigonométrica o geométrica del área de un triángulo conociendo dos lados y su ángulo comprendido ($\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\theta$):

- **Área de 1 triángulo inscrito:** $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(45°) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.35355$
- **Área total del octágono inscrito (A_i):** Multiplicamos el área de ese triángulo por los 8 lados del octágono:

$$A_i = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2} \approx \mathbf{2.8284}$$

2. Cálculo del Octágono Circunscrito (A_c)

En el octágono circunscrito, el polígono está por fuera del círculo. Esto significa que la **altura** (h) de cada uno de los 8 triángulos es exactamente igual al radio del círculo ($h = r = 1$), mientras que su base queda por fuera.

Para hallar la base de este triángulo, dividimos el triángulo de $45°$ a la mitad, obteniendo un triángulo rectángulo con un ángulo de $22.5°$ en el centro:

- Usando trigonometría básica: $\tan(22.5°) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{mitad de la base}}{1}$
- Sabemos por identidad geométrica que $\tan(22.5°) = \sqrt{2} - 1$.
- Por lo tanto, la **base completa** de uno de los 8 triángulos circunscritos es: $\text{Base} = 2 \times (\sqrt{2} - 1)$.
- **Área de 1 triángulo circunscrito:** $\frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)\times 1}{2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$
- **Área total del octágono circunscrito (A_c):** Multiplicamos por los 8 triángulos exteriores:

$$A_c = 8 \times (\sqrt{2} - 1) \approx \mathbf{3.3137}$$

3. Aplicación de las tres lógicas con estos resultados

Ahora que tenemos los dos valores exactos ($A_i = 2.8284$ y $A_c = 3.3137$), podemos ver cómo actúan los tres métodos explicados anteriormente sobre este mismo octágono:

Método	Operación Matemática	Resultado con el Octágono	Significado Geométrico
Aproximación	Usa solo A_i	El área es **mayor a 2.8284**	El octágono interno ya cubre el 90% del círculo.
Diferencia	$A_c - A_i$	$3.3137 - 2.8284 = \mathbf{0.4853}$	El área real está encerrada en un "margen de error" de 0.48.
División	$\frac{A_c}{A_i}$	$\frac{3.3137}{2.8284} = \mathbf{1.1715}$	El polígono exterior es un **17.15%** más grande que el interior.

Para comprenderlo visualmente de forma matemática, la relación entre ambos polígonos y el círculo se puede ver en la siguiente estructura:

