5.11 Desigualdades

En los números reales existe un orden, es decir, dados dos números, siempre podemos compararlos utilizando los siguientes símbolos:

- $>$: mayor que (desigualdad estricta).
- $<$: menor que (desigualdad estricta).
- $=$: igual que.

También se usan combinaciones de éstos:

- $\geq$: mayor o igual que (desigualdad no estricta).
- $\leq$: menor o igual que (desigualdad no estricta).

De la misma manera, podemos proponer desigualdades entre expresiones algebraicas y preguntarnos sobre la existencia de números reales que la satisfagan.

Para determinar los valores de x que dan solución a una desigualdad, podemos usar las siguientes propiedades: Propiedades de orden.

- (P1) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
- (P2) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
- (P3) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Encontrar el conjunto solución de la desigualdad

$$3x+2 > 4x-3$$

Paso 1: sumamos -2 de ambos lados de la desigualdad (P1) y simplificamos.

$$3x+2+(-2) > 4x-3+(-2)$$

$$3x > 4x-5$$

Paso 2: sumamos -4x de ambos lados de la desigualdad (P1) y simplificamos.

$$(-1)\,(-x) > (-1)\,(-5)$$

$$x<5$$

Conjunto solución: *x:*

$$x<5 = (-\infty,5)$$

Método gráfico para comprender y calcular el conjunto solución de una desigualdad cuadrática.

Decimos que una desigualdad es cuadrática si el término de mayor grado que aparece en ésta es 2.

Ejemplos:

$3x^2-4x+2 \leq 5x-1$: sí es una desigualdad cuadrática debido a que el término de mayor grado es $3x^2$.

$5x^3-5x > 3x^2-4$: no es una desigualdad cuadrática debido a que el término de mayor grado es $5x^3$, que tiene grado 3.

Dada una desigualdad cuadrática siempre es posible llevarla a una de las siguientes formas:

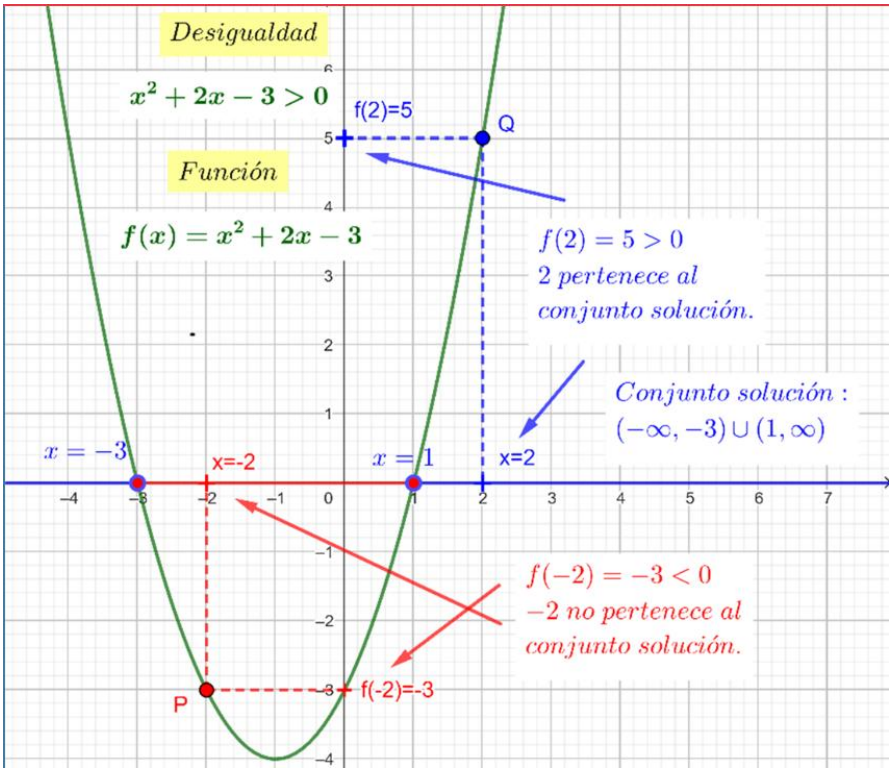
$$ax^2+bx+c > 0$$

$$ax^2+bx+c \geq 0$$

Esto es útil para comprender el significado de la desigualdad y determinar el conjunto solución de manera gráfica; si nosotros graficamos la función $f(x)= ax^2 + bx + c$, el conjunto solución de la desigualdad $ax^2 + bx + c \geq 0$, corresponde a las abscisas de los puntos de la gráfica que se encuentran por encima o sobre el eje y.

Ejemplo:

Consideremos la desigualdad: $\boldsymbol{x^2+2x-3 > 0}$



Método para resolver desigualdades cuadráticas.

Utilizando las propiedades P1, P2 y P3, llevamos la ecuación a una de las formas:

$$ax^2+bx+c > 0 \text{ (estricta)}$$

$$ax^2+bx+c \geq 0 \text{ (no estricta)}$$

Encontramos las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c = 0$

- Caso 1: Si $b^2-4ac > 0$, tenemos dos raíces reales distintas, x_1 y x_2 ($x_1 < x_2$).

Si $a > 0$; el conjunto solución es:

$$(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \text{ (estricta)}$$

$$(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty) \text{ (no estricta)}$$

Si $a < 0$; el conjunto solución es:

$$(x_1, x_2) \text{ (estricta)}$$

$$[x_1, x_2] \text{ (no estricta)}$$

- Caso 2: Si $b^2-4ac= 0$, tenemos una raíz doble $x1$.

Si $a > 0$; el conjunto solución es:

$$(-\infty, x_1) \cup (x_1, \infty) \text{ (estricta)}$$

$$(-\infty, \infty) \text{ (no estricta)}$$

Si $a < 0$; el conjunto solución es:

$$\phi \text{ (estricta)}$$

$$x_1 \text{ (no estricta)}$$

- Caso 3: Si $b^2-4ac < 0$ no tenemos raíces reales.

Si $a > 0$ el conjunto solución es:

$$(-\infty, \infty) \text{ (estricta)}$$

$$(-\infty, \infty) \text{ (no estricta)}$$

Si $a < 0$; el conjunto solución es:

$$\phi \text{ (estricta)}$$

$$\phi \text{ (no estricta)}$$