5.14 Propiedades del límite

Las propiedades de los límites son reglas matemáticas que sirven para simplificar el cálculo del límite de funciones complejas.

Supongamos que a, k, A, y B representan números reales, y f y g son funciones, de manera que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Para los límites que existen y son finitos, las propiedades de los límites se resumen en la Tabla 1

Constante k	$\lim_{x\to a} k = k$
Constante por una función	$\lim_{x\to a} [k \cdot f(x)] = k\lim_{x\to a} f(x) = kA$
Suma de funciones	$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$
Diferencia de funciones	$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = A - B$
Producto de funciones	$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$
Cociente de funciones	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0$
Función elevada a un exponente	$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = A^n$, donde n es un número entero positivo
raíz *enésima* de una función, donde n es un número entero positivo	$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} [f(x)]} = \sqrt[n]{A}$
Función polinómica	$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$

EJEMPLO 1

Evaluar el límite de una función de forma algebraica

Evalúe $\lim_{x\to 3} (2x + 5)$.

[Show/Hide Solution]

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}(2x+5) &= \lim_{x\to 3}(2x) + \lim_{x\to 3}(5) && \text{Propiedad de la suma de funciones}\\
&= 2\lim_{x\to 3}(x) + \lim_{x\to 3}(5) && \text{Constante por una propiedad de la función}\\
&= 2(3) + 5 && \text{Evalúe}\\
&= 11
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Evaluar el límite de una función de forma algebraica

Evalúe $\lim_{x\to 3}\left(5x^2\right)$.

[Show/Hide Solution]

Solución

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(5x^2) &= 5\lim_{x\to 3}(x^2) && \text{Constante por una propiedad de la función}\\ &= 5(3^2) && \text{Función elevada a una propiedad de exponente}\\ &= 45\end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Evaluar el límite de un polinomio de forma algebraica

Evalúe $\lim_{x\to 5}\left(2x^3-3x+1\right)$.

[Show/Hide Solution]

Solución

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(2x^3-3x+1) &= \lim_{x\to 5}(2x^3)-\lim_{x\to 5}(3x)+\lim_{x\to 5}(1) && \text{Suma de funciones}\\ &= 2\lim_{x\to 5}(x^3)-3\lim_{x\to 5}(x)+\lim_{x\to 5}(1) && \text{Constante por una función}\\ &= 2(5^3)-3(5)+1 && \text{Función elevada a un exponente}\\ &= 236 && \text{Evalúe}\end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Evaluar el límite de una potencia

Evalúe $\lim_{x\to 2}(3x+1)^5$.

[Show/Hide Solution]

Solución

Tomaremos el límite de la función a medida cuando x se acerca a 2 y elevaremos el resultado a la 5.ª potencia.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(3x+1)^5 &= \left(\lim_{x\to 2}(3x+1)\right)^5\\ &= (3(2)+1)^5\\ &= 7^5\\ &= 16.807\end{aligned}$$